



**XXIII SNPTTE
SEMINÁRIO NACIONAL
DE PRODUÇÃO E
TRANSMISSÃO DE
ENERGIA ELÉTRICA**

FI/GDS/01
18 a 21 de Outubro de 2015
Foz do Iguaçu - PR

GRUPO – X

GRUPO DE ESTUDO DE DESEMPENHO DE SISTEMAS ELÉTRICOS – GDS

**MÉTODO DE ALTO DESEMPENHO COMPUTACIONAL PARA ESTUDOS DE IMPACTO HARMÔNICO DE
NOVOS ACESSANTES À REDE BÁSICA**

Sergio Luis Varricchio
CEPEL

Cristiano de Oliveira Costa
CEPEL

Franklin Clement Véliz
CEPEL

RESUMO

Neste artigo é descrito um método de alto desempenho computacional para estudos de impacto harmônico de novos acessantes à rede básica (Sistema Interligado Nacional - SIN), recentemente implementado no programa HarmZs do Cepel. Para a realização destes estudos de acesso, é necessário o cálculo da impedância própria do ponto de acoplamento comum (PAC) entre o novo acessante e o SIN. Estas impedâncias devem ser calculadas para todas as frequências harmônicas, do 2º ao 50º harmônico, e para diversas condições de rede (sistema íntegro e com contingências).

O método proposto permite o cálculo de todas as impedâncias próprias do PAC para o SIN contingenciado em função da impedância própria do SIN íntegro. Isto evita a necessidade de remontagem e refatoração **LU** da matriz de admitâncias nodais **Y** para cada contingência do SIN, tornando este método dezenas de vezes mais rápido computacionalmente do que o anterior (implementado nas versões anteriores do HarmZs).

As bases teóricas do método bem como um caso prático, evidenciando seu alto desempenho, serão apresentados neste artigo.

PALAVRAS-CHAVE

Programa HarmZs, harmônicos, estudos de acesso à rede básica, método de alto desempenho computacional, lema de inversão de matrizes.

1.0 - INTRODUÇÃO

De acordo com os procedimentos de rede definidos pelo ONS [1], para a realização de estudos de impacto harmônico de novos acessantes à rede básica, é necessária a determinação (traçado), para cada harmônico de interesse (do 2º ao 50º), de um lugar geométrico (LG) de admitâncias no plano $G \times B$ vistas do ponto de acoplamento comum (PAC). Comumente se utilizam LGs com formato anular ou poligonal [2], [3].

Estas admitâncias, necessárias para a determinação dos LGs, devem ser calculadas para todas as frequências harmônicas, do 2º ao 50º harmônico, e para diversas condições de rede (sistema íntegro e com contingências).

O cálculo de cada uma destas admitâncias é feito pela inversão da correspondente impedância própria do PAC. Portanto, este cálculo é naturalmente visto como uma sucessão de respostas em frequência da impedância própria do PAC dentro do intervalo de frequências de 120 Hz a 3000 Hz com passo de 60 Hz (primeira abordagem). Assim, fixa-se uma topologia para o Sistema Interligado Nacional (SIN) e calcula-se a resposta em frequência da impedância própria do PAC. Terminada a resposta para uma condição de rede, muda-se esta condição e repete-se o procedimento.

Note que para a obtenção da impedância própria do PAC é necessário, para cada frequência harmônica e para cada topologia do SIN de interesse, a montagem da matriz de admitâncias nodais \mathbf{Y} , sua fatoração \mathbf{LU} e a solução de dois sistemas lineares triangulares equivalentes.

Outra abordagem para este problema (segunda abordagem) é encará-lo como o cálculo da impedância própria do PAC para uma sucessão de diferentes topologias do SIN para cada frequência harmônica de interesse. Desta forma, fixa-se a frequência harmônica e varia-se a topologia do SIN. Terminada toda a lista de contingências (topologias), incluindo o sistema íntegro, muda-se a frequência harmônica e repete-se o procedimento.

A vantagem desta segunda abordagem é permitir a extensão da metodologia apresentada em [4], originalmente desenvolvida para a consideração de contingências em estudos de sistemas de potência à frequência fundamental (fluxo de potência e curto-circuito), para estudos de comportamento (impacto) harmônico.

Utilizando esta metodologia, recentemente implementada no programa HarmZs do Cepel para estudos de comportamento harmônico de sistemas elétricos de potência, é possível se calcular todas as impedâncias próprias do PAC para o SIN contingenciado em função da impedância própria do PAC para o SIN íntegro. Isto evita a necessidade de remontagem e refatoração \mathbf{LU} da matriz \mathbf{Y} para cada contingência do SIN, tornando esta segunda abordagem dezenas de vezes mais rápida computacionalmente do que a primeira (implementada nas versões anteriores do HarmZs).

Desta forma, um número muito maior de horizontes de planejamento do SIN e de contingências poderá ser utilizado nos estudos de acesso à rede básica, sem afetar sensivelmente o tempo de obtenção dos resultados produzidos pelo HarmZs. Este fato permanece válido se, além de um maior número de horizontes e de contingências, desvios em relação à frequência fundamental forem considerados, como são comumente adotados em estudos de acesso envolvendo elos de corrente contínua.

2.0 - ALTERAÇÕES NO SISTEMA DE TRANSMISSÃO

As tensões e correntes na rede íntegra (inicial), para qualquer frequência, se relacionam por:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_0 \mathbf{V}_0 \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{Y}_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é a matriz de admitâncias nodais da rede inicial, \mathbf{V}_0 e $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^n$ são os vetores de tensões e injeções de corrente nos nós desta rede, respectivamente, e n o número de nós (barras).

Introduzindo-se alterações nas admitâncias de um ou mais elementos da rede, as tensões nodais sofrerão modificações. Considerando as injeções de corrente inalteradas, na nova situação, tem-se:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \mathbf{V} \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é a matriz de admitâncias nodais da rede alterada e $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^n$ o vetor de tensões nos nós desta rede, respectivamente.

A matriz \mathbf{Y} pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \Delta \mathbf{Y} \quad (2.3)$$

onde $\Delta \mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é a matriz global de alterações da rede, envolvendo um ou mais elementos. Esta matriz pode ser expressa como:

$$\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{M} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H \quad (2.4)$$

onde $\delta \mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ é a matriz elementar de alterações da rede e $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ é a matriz de conexão. O sobrescrito H denota transposição conjugada de matrizes ou vetores. A dimensão m depende do tipo e do número de elementos alterados.

O vetor de tensões nodais da rede alterada pode ser expresso como:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V} \quad (2.5)$$

onde $\Delta \mathbf{V} \in \mathbb{C}^n$ é o vetor de variações de tensões nodais devidas às alterações na rede. Conforme mostrado no Apêndice A, este vetor de variações pode ser expresso por:

$$\Delta \mathbf{V} = -\mathbf{Z}_0 \mathbf{M} (\delta \mathbf{Y}^{-1} + \mathbf{M}^H \mathbf{Z}_0 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 \quad (2.6)$$

onde \mathbf{Z}_0 é a matriz de impedâncias nodais da rede inicial. O vetor \mathbf{I} pode ser expresso genericamente por:

$$\mathbf{I} = [i_1 \quad i_2 \quad \dots \quad i_p \quad \dots \quad i_{n-1} \quad i_n]^T \quad (2.7)$$

onde p é a barra do PAC, $i_1, i_2, \dots, i_p, \dots, i_{n-1}$ e i_n são as injeções de correntes nos nós (barras) 1, 2, ..., p , ..., $n-1$ e n , respectivamente. O sobrescrito T denota transposição de matrizes ou vetores.

Fazendo $i_k = 0$ para todo $k \neq p$ e $i_p = 1$, pode-se particularizar o vetor \mathbf{I} como:

$$\mathbf{I}_p = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0 \quad 0]^T \quad (2.8)$$

Utilizando este vetor em (2.1), a solução \mathbf{V}_0 do sistema linear será igual à coluna p , \mathbf{Z}_0^p , da matriz \mathbf{Z}_0 , ou seja:

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{Z}_0^p, \text{ para } \mathbf{I} = \mathbf{I}_p \quad (2.9)$$

Note que a obtenção de \mathbf{Z}_0^p exige a fatoração **LU** da matriz \mathbf{Y}_0 e a solução de dois sistemas lineares triangulares equivalentes. Substituindo (2.9) em (2.6), o vetor $\Delta \mathbf{V}$ será igual à variação $\Delta \mathbf{Z}_0^p$ ocorrida na coluna p da matriz \mathbf{Z}_0 devida à alteração dada por (2.4) na rede inicial, ou seja:

$$\Delta \mathbf{Z}_0^p = -\mathbf{Z}_0 \mathbf{M} (\delta \mathbf{Y}^{-1} + \mathbf{M}^H \mathbf{Z}_0 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^H \mathbf{Z}_0^p \quad (2.10)$$

Finalmente, a coluna p , \mathbf{Z}^p , da matriz de impedâncias nodais \mathbf{Z} da rede alterada será dada por:

$$\mathbf{Z}^p = \mathbf{Z}_0^p + \Delta \mathbf{Z}_0^p \therefore$$

$$\mathbf{Z}^p = \mathbf{Z}_0^p - \mathbf{Z}_0 \mathbf{M} (\delta \mathbf{Y}^{-1} + \mathbf{M}^H \mathbf{Z}_0 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^H \mathbf{Z}_0^p \quad (2.11)$$

A matriz quadrada $(\delta \mathbf{Y}^{-1} + \mathbf{M}^H \mathbf{Z}_0 \mathbf{M})$ possui dimensão $m \times m$ e pode ser montada sem dificuldades, desde que $\mathbf{Z}_0 \mathbf{M}$ seja previamente calculado. A solução de $\mathbf{Z}_0 \mathbf{M}$ exige além da fatoração **LU** da matriz \mathbf{Y}_0 , já realizada para a obtenção de \mathbf{Z}_0^p , a solução de dois sistemas lineares triangulares equivalentes para cada uma das m colunas da matriz \mathbf{M} .

2.1 Matrizes $\Delta \mathbf{Y}$ e \mathbf{M} para Diversos Tipos de Alterações Simples

Na Tabela 2.1 estão apresentadas as matrizes $\delta \mathbf{Y}$ e \mathbf{M} para a adição de diversos tipos de elementos à rede. Considerou-se que os elementos série serão adicionados entre os nós genéricos k e j e os elementos “shunts” entre os nós k e de referência da rede inicial. Para a consideração de contingências, ou seja, eliminação de elementos, a matriz $\delta \mathbf{Y}$ deverá ser multiplicada por -1 .

Tabela 2.1: Definições das matrizes $\delta\mathbf{Y}$ e \mathbf{M} para a adição de diversos tipos de elementos à rede

Elemento	\mathbf{M}^T	$\delta\mathbf{Y}$	Observações
Transformador de 2 Enrolamentos	$\begin{matrix} & k & & j \\ & \downarrow & & \downarrow \\ [0 & \dots & \frac{1}{a_1^*} & \dots & -\frac{1}{a_2^*} & \dots & 0] \end{matrix}$	y_{trafo}	<p>y_{trafo} denota a admitância de curto circuito do transformador.</p> <p>a_1 e a_2 denotam as tensões fasoriais dos “taps” dos enrolamentos primário e secundário, respectivamente [5].</p> <p>O sobrescrito $*$ denota complexo conjugado.</p>
Linha de Transmissão (LT) com capacitância diferente de zero	$\begin{matrix} & k & & j \\ & \downarrow & & \downarrow \\ [0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0] \\ [0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0] \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} y_s & y_m \\ y_m & y_s \end{bmatrix}$	<p>y_s e y_m denotam as admitâncias própria e de transferência da LT, respectivamente, sendo dadas por:</p> $y_s = y_c \coth(\gamma l)$ $y_m = -y_c \operatorname{csch}(\gamma l)$ <p>onde y_c e γ são, respectivamente, a admitância característica e a constante de propagação da LT [6].</p>
LT com capacitância nula ou equipamento série	$\begin{matrix} & k & & j \\ & \downarrow & & \downarrow \\ [0 & \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & 0] \end{matrix}$	y_{serie}	y_{serie} denota a admitância série (longitudinal) da LT ou do equipamento.
Equipamento “shunt”, carga ou gerador	$\begin{matrix} & k \\ & \downarrow \\ [0 & \dots & 1 & \dots & 0] \end{matrix}$	y_{sh}	y_{sh} denota a admitância do equipamento, da carga ou do gerador.

2.2 Matrizes $\delta\mathbf{Y}$ e \mathbf{M} para Alterações Múltiplas

Considere uma alteração (adição ou eliminação) múltipla formada por duas alterações simples 1 e 2. Sejam $\delta\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}^{m_1 \times m_1}$ e $\mathbf{M}_1 \in \mathbb{C}^{n \times m_1}$ as matrizes referentes à alteração 1 e $\delta\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}^{m_2 \times m_2}$ e $\mathbf{M}_2 \in \mathbb{C}^{n \times m_2}$ as matrizes referentes à alteração 2. As matrizes $\delta\mathbf{Y}$ e \mathbf{M} referentes à alteração múltipla, ou seja, à ocorrência simultânea das alterações 1 e 2 são dadas por:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_1 \mid \mathbf{M}_2] \quad (2.12)$$

$$\delta\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{Y}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta\mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times (m_1 + m_2)}$ e $\delta\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{(m_1 + m_2) \times (m_1 + m_2)}$.

De maneira geral, considerando uma alteração múltipla formada por q alterações simples, as matrizes $\delta\mathbf{Y}$ e \mathbf{M} são dadas por:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_1 \mid \mathbf{M}_2 \mid \dots \mid \mathbf{M}_q] \quad (2.14)$$

$$\delta\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{Y}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta\mathbf{Y}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \delta\mathbf{Y}_q \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

onde $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times \sum_{l=1}^q m_l}$ e $\delta\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{(\sum_{l=1}^q m_l) \times (\sum_{l=1}^q m_l)}$, sendo m_l a ordem das matrizes $\delta\mathbf{Y}_l$ ($l = 1, \dots, q$) referentes às alterações simples.







Caso se deseje apenas alterar o valor da admitância de um elemento já existente na rede, basta eliminá-lo e, a seguir, adicioná-lo com o valor de admitância desejado. Note que este processo é feito automaticamente pelo HarmZs.

3.0 - AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO COMPUTACIONAL DA METODOLOGIA PROPOSTA

O desempenho computacional da metodologia proposta, recentemente implementada no programa HarmZs do Cepel, foi comparado com o da metodologia anterior (implementada em versões anteriores do HarmZs). Para este fim, foram utilizados os arquivos de dados de rede (extensão hzs) e de linguagem "batch" (de extensão mbt contendo instruções para a realização automática de diversas contingências) objetivando o cálculo dos valores de impedância própria vista da barra CA da conversora de Xingu. Deve-se observar que estes arquivos são os mesmos utilizados no estudo de comportamento harmônico apresentado na referência [7], sobre a expansão da interligação entre as Regiões Norte/Nordeste e Sudeste/Centro-Oeste, associada à entrada em operação da usina de Belo Monte. Detalhes sobre a modelagem da rede elétrica podem ser encontrados em [7].

Foram utilizados 31 casos base (redes íntegras) correspondentes a diversos cenários e condições de carregamento. Todos os elementos do sistema pertencentes até a terceira vizinhança da barra de Xingu foram contingenciados. Este procedimento gerou um total de 2238 redes contingenciadas [7]. Na Tabela 3.1 estão apresentados os resultados em termos de tempos de CPU gastos pela metodologia anterior e pela metodologia proposta para a execução de todos estes casos para cada um dos 49 harmônicos de interesse. Estes tempos, bem como a razão entre eles, foram medidos em três computadores diferentes, cujas principais características também estão descritas nesta tabela. Como se pode observar, independentemente do computador utilizado, a metodologia proposta foi aproximadamente 40 vezes mais rápida que a anterior, reduzindo de horas para minutos o tempo do estudo.

Tabela 3.1: Comparação entre os desempenhos computacionais das metodologias

Processador	Memória RAM (GB)	Sistema Operacional	Tempo de CPU (s)		Razão entre os Tempos de CPU (t_a / t_p)
			Metodologia Anterior (t_a)	Metodologia Proposta (t_p)	
Intel Core i5-3570 3.4 GHz	8.00	64 Bits	13582.63 ( 3h:46min)	335.21 ( 6min)	40.52
Intel Core 2 QUAD Q 9550 2.83 GHz	3.25	32 Bits	22544.12 ( 6h:16min)	544.30 ( 9min)	41.42
Intel T2400 1.83 GHz	2.49	32 Bits	58428.09 ( 16h:14min)	1389.39 ( 23min)	42.05

4.0 - CONCLUSÃO

Neste artigo foi descrito um método de alto desempenho computacional para estudos de impacto harmônico de novos acessantes à rede básica, recentemente implementado no programa HarmZs do Cepel.

O método proposto permite o cálculo de todas as impedâncias próprias do PAC para o SIN contingenciado em função da impedância própria do PAC para o SIN íntegro. Isto evita a necessidade de remontagem e refatoração LU da matriz de admitâncias nodais \mathbf{Y} para cada contingência do SIN, tornando este método dezenas de vezes mais rápido computacionalmente do que o anterior (implementado nas versões anteriores do HarmZs).

Para o teste de desempenho computacional da nova metodologia, utilizou-se 31 casos base (redes íntegras) e 2238 redes contingenciadas. Na execução de todos estes casos, a metodologia proposta foi aproximadamente 40 vezes mais rápida que a anterior, reduzindo de horas para minutos o tempo do estudo. O teste foi realizado em três computadores com arquiteturas significativamente diferentes e o desempenho da nova metodologia em relação à anterior se mostrou praticamente constante.

Com a implementação do método proposto no HarmZs, um número muito maior de horizontes de planejamento do SIN e de contingências poderá ser utilizado nos estudos de acesso à rede básica, sem afetar sensivelmente o tempo de obtenção dos resultados produzidos pelo HarmZs. Este fato permanece válido se, além de um maior número de horizontes e de contingências, desvios em relação à frequência fundamental forem considerados, como são comumente adotados em estudos de acesso envolvendo elos de corrente contínua.

5.0 -

6.0 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Procedimentos de Rede - Submódulo 2.8 - Gerenciamento dos indicadores de desempenho da Rede Básica e de seus componentes – ONS – Operador Nacional do Sistema – www.ons.org.br.
- [2] Guide to the Specification and Design Evaluation of A.C. Filters for HVDC Systems - Publicly Available Specification - Pre-Standard – IEC PAS 62001 first edition 2004-07.
- [3] Franklin Clement Véliz, Sergio Luis Varricchio e Cristiano de Oliveira Costa, “Metodologia para a Representação de Redes Elétricas por Polígonos de Admitâncias para Estudos de Impacto Harmônico”, XXII SNPTTEE - Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Brasília, DF, 12 a 16 de outubro de 2013.
- [4] O. Alsaç, B. Stott and W. F. Tinney, “Sparsity-Oriented Compensation Methods for Modified Network Solutions”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No. 5, May 1983.
- [5] Sergio Luis Varricchio, Sergio Gomes Jr. and Ricardo Diniz Rangel, “Three Winding Transformer s-Domain Model for Modal Analysis of Electrical Networks”, International Journal of Electrical Power and Energy Systems, Vol. 33, Issue 3, pp. 571 – 582, March, 2011.
- [6] Sergio Gomes Jr., Nelson Martins, Sergio L. Varricchio e Carlos Portela, “Modal Analysis of Electromagnetic Transients in AC Networks Having Long Transmission Lines”, IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 20, no. 4, October 2005, pp. 2623-2630.
- [7] “Expansão da Interligação entre as Regiões Norte/Nordeste e Sudeste/Centro-Oeste - Elo de Corrente Contínua ± 800 kV Xingu – Terminal Rio”, Relatório R2, N° EPE-DEE-RE-136/2014-rev0, 30 de outubro de 2014.
- [8] William L. Brogan, “Modern Control Theory”, Third Edition, Prentice Hall, 1991.

7.0 - DADOS BIOGRÁFICOS

Sergio Luis Varricchio: Recebeu a graduação em engenharia elétrica pela Universidade Católica de Petrópolis em 1987 e o mestrado, também em engenharia elétrica, pela Universidade Federal do Rio de Janeiro em 1994. Trabalha no CEPEL – Centro de Pesquisas de Energia Elétrica desde 1989, onde atua como pesquisador e gerente de projetos, sendo responsável pela equipe de desenvolvimento do programa HarmZs, para estudos de comportamento harmônico de sistemas elétricos de potência. Suas áreas de interesse são qualidade de energia e transitórios eletromagnéticos. É senior member do IEEE e membro do CIGRÉ. De 2008 a 2009 atuou como presidente do Capítulo de Potência e Energia da Seção Rio de Janeiro do IEEE. Atualmente está em fase de desenvolvimento de tese de doutorado em engenharia elétrica pela Universidade de Brasília no tema de equivalentes dinâmicos de redes elétricas de grande porte.

Cristiano de Oliveira Costa: Recebeu a graduação em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) em 2002 e o mestrado também em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) em 2013. Trabalha no CEPEL - Centro de Pesquisas de Energia Elétrica desde 2002 no desenvolvimento de ferramentas computacionais aplicadas à análise da qualidade de energia elétrica. Tem como áreas de interesse qualidade de energia e transitórios eletromagnéticos.

Franklin Clement Véliz: Recebeu a graduação em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) em 2001 e o mestrado também em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) em 2005. Trabalha no CEPEL - Centro de Pesquisas de Energia Elétrica desde 2002 no desenvolvimento de novas metodologias e ferramentas computacionais aplicadas à análise da qualidade de energia elétrica. Tem como áreas de interesse qualidade de energia e transitórios eletromagnéticos.

8.0 - APÊNDICE A: DEMONSTRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE VARIAÇÃO DE TENSÃO

Para maior facilidade de leitura, as equações numeradas de (2.1) a (2.5) são repetidas a seguir:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_0 \mathbf{V}_0 \quad (8.1)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \mathbf{V} \quad (8.2)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \Delta \mathbf{Y} \quad (8.3)$$

$$\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{M} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H \quad (8.4)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V} \quad (8.5)$$

Substituindo (8.4) em (8.3), obtém-se:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{M} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H \quad (8.6)$$

Substituindo (8.5) e (8.6) em (8.2), obtém-se:

$$\mathbf{I} = (\mathbf{Y}_0 + \mathbf{M} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H)(\mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}) \therefore$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_0 \mathbf{V}_0 + \mathbf{Y}_0 \Delta \mathbf{V} + \mathbf{M} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H (\mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}) \quad (8.7)$$

Substituindo (8.1) em (8.7), obtém-se:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I} + \mathbf{Y}_0 \Delta \mathbf{V} + \mathbf{M} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H (\mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}) \therefore \mathbf{Y}_0 \Delta \mathbf{V} + \mathbf{M} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H (\mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}) = \mathbf{0} \therefore \mathbf{Y}_0 \Delta \mathbf{V} = -\mathbf{M} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H (\mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}) \therefore$$

$$\Delta \mathbf{V} = -\mathbf{Z}_0 \mathbf{M} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H (\mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}) \quad (8.8)$$

sendo $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Y}_0^{-1}$.

Pré-multiplicando (8.8) por \mathbf{M}^H , obtém-se:

$$\mathbf{M}^H \Delta \mathbf{V} = -\mathbf{M}^H \mathbf{Z}_0 \mathbf{M} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H (\mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}) \quad (8.9)$$

Definindo

$$\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{M}^H \mathbf{Z}_0 \mathbf{M} \quad (8.10)$$

e substituindo (8.10) em (8.9), obtém-se:

$$\mathbf{M}^H \Delta \mathbf{V} = -\hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H (\mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}) \therefore \mathbf{M}^H \Delta \mathbf{V} = -\hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 - \hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H \Delta \mathbf{V} \therefore$$

$$\mathbf{M}^H \Delta \mathbf{V} + \hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H \Delta \mathbf{V} = -\hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 \therefore (\mathbf{1} + \hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y}) \mathbf{M}^H \Delta \mathbf{V} = -\hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 \therefore$$

$$\mathbf{M}^H \Delta \mathbf{V} = -(\mathbf{1} + \hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y})^{-1} \hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 \quad (8.11)$$

onde $\mathbf{1}$ denota a matriz identidade de ordem n .

Tem-se que:

$$(\mathbf{1} + \hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y})^{-1} = \left\{ (\hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y}) \left[(\hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y})^{-1} + \mathbf{1} \right] \right\}^{-1} \therefore (\mathbf{1} + \hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y})^{-1} = \left[(\hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y})^{-1} + \mathbf{1} \right]^{-1} (\hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y})^{-1} \therefore$$

$$(\mathbf{1} + \hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y})^{-1} = [\delta \mathbf{Y}^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1} + \mathbf{1}]^{-1} \delta \mathbf{Y}^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \quad (8.12)$$

Substituindo (8.12) em (8.11), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^H \Delta \mathbf{V} &= -[\delta \mathbf{Y}^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1} + \mathbf{1}]^{-1} \delta \mathbf{Y}^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{Z}} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 \quad \therefore \mathbf{M}^H \Delta \mathbf{V} = -[\delta \mathbf{Y}^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1} + \mathbf{1}]^{-1} \delta \mathbf{Y}^{-1} \delta \mathbf{Y} \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 \quad \therefore \\ \mathbf{M}^H \Delta \mathbf{V} &= -[\delta \mathbf{Y}^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1} + \mathbf{1}]^{-1} \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 \end{aligned} \quad (8.13)$$

O Lema de Inversão de Matrizes (LIM) [8] estabelece que:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{1} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \quad (8.14)$$

Aplicando o LIM à $[\mathbf{1} + \delta \mathbf{Y}^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1}]^{-1}$, obtém-se:

$$[\mathbf{1} + \delta \mathbf{Y}^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1}]^{-1} = \mathbf{1} - \delta \mathbf{Y}^{-1} (\mathbf{1} + \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \delta \mathbf{Y}^{-1})^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \quad (8.15)$$

Substituindo (8.15) em (8.13), obtém-se:

$$\mathbf{M}^H \Delta \mathbf{V} = -[\mathbf{1} - \delta \mathbf{Y}^{-1} (\mathbf{1} + \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \delta \mathbf{Y}^{-1})^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1}] \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 \quad (8.16)$$

De (8.8), tem-se:

$$\Delta \mathbf{V} = -\mathbf{Z}_0 \mathbf{M} \delta \mathbf{Y} (\mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 + \mathbf{M}^H \Delta \mathbf{V}) \quad (8.17)$$

Substituindo (8.16) em (8.17), obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{V} &= -\mathbf{Z}_0 \mathbf{M} \delta \mathbf{Y} \left\{ \mathbf{1} - [\mathbf{1} - \delta \mathbf{Y}^{-1} (\mathbf{1} + \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \delta \mathbf{Y}^{-1})^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1}] \right\} \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 \quad \therefore \\ \Delta \mathbf{V} &= -\mathbf{Z}_0 \mathbf{M} \delta \mathbf{Y} \left\{ \mathbf{1} - \mathbf{1} + \delta \mathbf{Y}^{-1} (\mathbf{1} + \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \delta \mathbf{Y}^{-1})^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \right\} \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 \quad \therefore \\ \Delta \mathbf{V} &= -\mathbf{Z}_0 \mathbf{M} (\mathbf{1} + \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \delta \mathbf{Y}^{-1})^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 \end{aligned} \quad (8.18)$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} + \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \delta \mathbf{Y}^{-1})^{-1} &= [\hat{\mathbf{Z}}^{-1} (\hat{\mathbf{Z}} + \delta \mathbf{Y}^{-1})]^{-1} \quad \therefore \\ (\mathbf{1} + \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \delta \mathbf{Y}^{-1})^{-1} &= (\hat{\mathbf{Z}} + \delta \mathbf{Y}^{-1})^{-1} \hat{\mathbf{Z}} \end{aligned} \quad (8.19)$$

Substituindo (8.19) em (8.18), obtém-se:

$$\Delta \mathbf{V} = -\mathbf{Z}_0 \mathbf{M} (\hat{\mathbf{Z}} + \delta \mathbf{Y}^{-1})^{-1} \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 \quad (8.20)$$

Substituindo (8.10) em (8.20), obtém-se:

$$\Delta \mathbf{V} = -\mathbf{Z}_0 \mathbf{M} (\delta \mathbf{Y}^{-1} + \mathbf{M}^H \mathbf{Z}_0 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^H \mathbf{V}_0 \quad (8.21)$$